



Серия №23. (He) счётность

14 июля

Определение. Бесконечное множество называется счётным, если все его элементы могут быть пронумерованы натуральными числами (т.е. существует биекция с \mathbb{N}).

Лемма. В любом непустом подмножестве натуральных чисел есть наименьший элемент.

0. а) Докажите, что множество четных чисел счётно.
б) Докажите, что множество целых чисел счётно.

Задачи

- Докажите, что у счётного множества любое бесконечное подмножество тоже счётно.
- Докажите, что объединение нескольких счётных множеств счётно.
- а) Дана клетчатая доска, бесконечная вправо и вниз. Докажите, что множество её клеточек счётно.
б) Докажите, что множество рациональных чисел счётно.
- а) Докажите, что множество конечных строк из 0 и 1 счётно.
б) Докажите, что множество конечных подмножеств \mathbb{N} счётно.
- а) На прямой отметили бесконечное число попарно непересекающихся интервалов длины 1. Докажите, что полученное множество интервалов счётно.
б) То же самое, только на этот раз интервалы произвольной длины.
- На плоскости нарисовали бесконечное количество непересекающихся:
а) Кругов.
б) «Восьмёрок» («Восьмёрка» – объединение двух касающихся окружностей любых размеров).
в) «Крестиков» («Крестик» – два перпендикулярных отрезка, пересекающихся во внутренней точке каждого).
Докажите, что их получилось счётное количество.
- а) Дан бесконечный список бесконечных строк из 0 и 1. Как построить бесконечную строку из 0 и 1, которая гарантированно не встретится в данном списке?
б) Докажите, что множество бесконечных строк из 0 и 1 несчётно.
в) Докажите, что множество вещественных чисел на отрезке $[0; 1]$ несчётно.
г) Докажите, что множество вещественных чисел несчётно.
д) Докажите, что множество подмножеств \mathbb{N} несчётно.
- Является ли счётным множество подмножеств \mathbb{N} , если известно, что:
а) никакие два из них не пересекаются;
б) любые два из них пересекаются не более, чем по 10 элементам;
в) любые два пересекаются не более, чем по конечному множеству;
г) среди любых двух одно является подмножеством другого?
- Дана бесконечная шахматная доска, в каждой клетке которой стоит натуральное число (числа могут повторяться). Идя королем по доске (возможно, с повторением клеток) и выписывая по порядку числа из посещаемых клеток, мы получаем «королевскую» последовательность. Докажите, что для любой данной доски

найдется некоролевская последовательность.